154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

I Généralités sur les sous-espaces stables

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Exemple 2. *(i)* $\mathrm{Im}(u)$ *et* $\mathrm{Ker}(u)$ *sont stables par* u.

(ii) Les sous-espaces propres de u *sont stables par* u.

(iii) Si u *est une homothétie, tous les sous-espaces de* E *sont stables.*

Proposition 3. *Soient* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *qui commutent. Alors :*

(i) Tout sous-espace propre de u *est stable par* v.

(ii) $\mathrm{Im}(u)$ *et* $\mathrm{Ker}(u)$ *sont stables par* v.

Exemple 4. *Les sous-espaces caractéristiques de* u *sont stables par* u.

Corollaire 5. *Pour tout* $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ *et* $\mathrm{Im}(P(u))$ *sont stables par* u.

Corollaire 6. *Soit* p *un projecteur. Alors* F *est stable par* p *si, et seulement si,* F *est la somme directe d'un sous-espace de* $\mathrm{Im}(p)$ *et d'un sous-espace de* $\mathrm{Ker}(p)$.

Proposition 7. *(i) Si* F *est stable par* $u, v \in \mathcal{L}(E)$, *alors il est stable par* $u + v$ *et par* $u \circ v$.

(ii) Si F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* E *stables par* u, *alors* $F + G$ *et* $F \cap G$ *sont stables par* u.

Application 8. *Si* u *stabilise toutes les droites vectorielles de* E, *alors* u *est une homothétie.*

2) Endomorphismes induits et bases adaptées

Proposition 9. *On suppose* F *stable par* u. *Alors* u *induit deux endomorphismes* $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ *et* $\overline{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ *obtenu par passage au quotient :*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "u|_F"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "u"'] & E/F \arrow[d, "\overline{u}"'] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & E/F \end{tikzcd}$$

Proposition 10. *On suppose* F *stable par* u *avec* $\dim F = r$. *Soit* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \sqcup \mathcal{B}'$ *une base de* E, *dont les* r *premiers vecteurs forment une base* $\mathcal{B}_F$ *de* F. *Alors la matrice de* u *dans la base* $\mathcal{B}$ *est de la forme* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *avec* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u|_F)$ *et* $C = \mathrm{Mat}_{\pi(\mathcal{B}')}(\overline{u})$. *De plus,* $\chi_u = \chi_{u|_F}\chi_{\overline{u}}$. *Réciproquement, une matrice triangulaire par blocs fournit des sous-espaces stables.*

Proposition 11. *On suppose* F *stable par* u. *Alors :*

(i) $\chi_{u|_F}$ *divise* χ_u.

(ii) $\pi_{u|_F}$ *divise* π_u.

Proposition 12. χ_u *est irréductible si, et seulement si, les seuls sous-espaces de* E *stables par* u *sont* $\{0\}$ *et* E.

Application 13. *Soient* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *et* $w = uv - vu$. *Supposons que* $\mathrm{rg}(w) = 1$. *Alors* χ_u *n'est pas irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$.

3) Dualité et sous-espaces stables

Définition 14. Pour $A \subseteq E$ et $B \subseteq E^\star$, on note :

(i) $A^\perp = \{\varphi \in E^\star \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de A dans $E^\star$.

(ii) $B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de B dans E.

Proposition 15. *On a* $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Proposition 16. *(i) Si* $A_1 \subset A_2 \subset E$, $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.

(ii) Si $B_1 \subset B_2 \subset E^\star$, $B_2^\circ \subset B_1^\circ$.

(iii) Si $A \subset E$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$.

(iv) Si $B \subset E^\star$, $B^\circ = (\mathrm{Vect}\, B)^\circ$.

Définition 17. Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, G)$. L'application ${}^t u : G^\star \to E^\star$ définie pour $f \in E^\star$ par ${}^t u(f) = f \circ u$ est appelée transposée de u.

Proposition 18. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors* F *est stable par* u *si, et seulement si,* $F^\perp$ *est stable par* ${}^t u$.

Application 19. u *est trigonalisable si, et seulement si,* χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$.

II Application à la réduction

1) Diagonalisation et trigonalisation

Théorème 20 (Lemme des noyaux)**.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que les P_i sont premiers entre eux deux à deux, alors :*

$$\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(f)$$

Corollaire 21. *(i) E est somme directe de ses sous-espaces stables.*

(ii) u est diagonalisable si, et seulement si, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.

Corollaire 22. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Supposons u diagonalisable (resp. trigonalisable). Alors $u|_F$ est diagonalisable (resp. trigonalisable).*

Théorème 23 (Co-réduction)**.** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux. Si les u_i sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors on peut les diagonaliser (resp. trigonaliser) dans une même base.*

2) Décomposition de Dunford

Proposition 24. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. Alors :*

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$

(ii) Pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Théorème 25 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes tels que :*

(i) d est diagonalisable, n est nilpotent

(ii) $f = d + n$ et n et d commutent

De plus, d et n sont des polynômes en f

Application 26. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford, alors la décomposition de Dunford de e^A est donnée par $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I)$ nilpotente.*

3) Réduction de Jordan pour les nilpotents

Lemme 27. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{1\leqslant k\leqslant q-1}$ est une famille libre de E et l'espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est u-stable.*

Théorème 28. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Alors il existe une base $\mathcal{B} = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ de E telle que chaque s.e.v. $E_i = \operatorname{Vect} \mathcal{B}_i$ soit stable par u et que la matrice de $u|_{E_i}$ soit :*

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}), \;\; \textit{avec } q_i = \dim_{\mathbb{K}} E_i$$

Théorème 29. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\Pi_u = \prod_{i=1}^{\rho}(X - \lambda_i)^{\beta_i}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit de la forme $A = \operatorname{Diag}(J_1, \dots, J_\rho)$ avec pour tout $k \in [\![1, \rho]\!]$:*

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K}), \;\; \textit{où } \varepsilon_{k,i} \in \{0, 1\}$$

4) Réduction des endomorphismes normaux

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

Lemme 30. *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors F et $F^\perp$ sont stables par u et $u^\star$.*

Lemme 31. *Si $n = 2$, alors il existe une base orthonormée telle que :*

(i) u est diagonalisable si u a une valeur propre réelle.

(ii) sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sinon.

Théorème 32. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \;\; \textit{avec} \;\; \begin{cases} n = r + 2s \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \\ \tau_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

III Théorie des représentations

Soient G un groupe fini de cardinal n et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie d.

Définition 33. Une représentation linéaire de G dans V est un morphisme $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$. On notera souvent ρ_s au lieu de $\rho(s)$. On dit que V est un espace de représentation de G. Le degré de ρ est $d = \dim V$.

Exemple 34. *La représentation triviale la représentation de degré 1 :*

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Exemple 35. *On suppose que $d = n$. Soit $(e_t)_{t \in G}$ une base de V. La représentation suivante est appelée représentation régulière :*

$$R : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{GL}(V) \\ s & \longmapsto & (e_t \mapsto e_{st}) \end{array} \right.$$

Définition 36. Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire, et soit W un sous-espace vectoriel de V stable par G (donc stable par ρ_s pour tout $s \in G$). On définit alors une sous-représentation de ρ par :

$$\rho|_W : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{GL}(W) \\ s & \longmapsto & p_s|_W \end{array} \right.$$

Définition 37. Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. Si $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, on dit alors que ρ est la somme directe des $\rho_i = \rho|_{V_i}$, que l'on note $\rho = \bigoplus_{i=1}^r \rho_i$.

Définition 38. Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. On dit qu'elle est irréductible si V n'est pas réduit à $\{0\}$ et si aucun sous-espace vectoriel non trivial de V n'est stable par G.

Remarque 39. *Toute représentation de degré 1 est irréductible.*

Théorème 40. *Toute représentation linéaire est somme directe de représentations irréductibles.*

Proposition 41 (Lemme de Schur)**.** *Soient $\rho^1 : G \to \mathcal{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \to \mathcal{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G. Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire telle que, pour tout $s \in G$, $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$. Alors :*

(i) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, alors $f = 0$.

(ii) Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, alors f est une homothétie.

Développements

— Décomposition de Dunford (24,25) [Gou94]

— Réduction de Jordan (par la dualité) (27,28,29) [Rom20]

— Réduction des endomorphismes normaux (30,31,32) [Gou94]

Références

[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition

[BMP05] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K

[CG13] P. Caldero et J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1.* Calvage et Mounet

[Rom20] J.-E. Rombaldi. *Algèbre et Géométrie.* DeBoeck

[Ser70] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann